Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-236-244
УДК 51-76, 519.62

Математическое моделирование в задаче разработки эффективного метода контроля фузариоза колоса пшеницы

Евгений Олегович БУРЛАКОВ[1,2] **, Иван Николаевич МАЛЬКОВ**[1,3]
[1] ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»
625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6
[2] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65
[3] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В данной работе построена математическая модель на основе непрерывной динамической системы, формализующая взаимодействие фузариевых грибов, растений пшеницы и почвенных микроорганизмов (микофагов и сапрофагов). В работе проведен статистический анализ имеющихся экспериментальных данных, полученных в лабораторных условиях, на основании которого решена задача о восстановлении биологически интерпретируемых параметров построенной модели рассматриваемой экологической системы. В работе также рассмотрена задача импульсного управления в рамках построенной модели, отвечающего направленному воздействию на пищевые цепочки в изучаемой системе, с целью стимуляции роста популяций естественных антагонистов вызывающего патологию пшеницы фузариевого гриба путем внесения в почву специальных смесей органических удобрений. Получены условия, гарантирующие управляемость в рамках рассматриваемой математической модели, а также обеспечивающие непрерывную зависимость решений моделирующих уравнений от управляющих воздействий.

Ключевые слова: математические модели в экологии, идентификация параметров математических моделей, задачи импульсного управления

Благодарности: Работа выполнена в рамках реализации программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030». Результаты разделов 1 и 2 получены вторым автором в Тамбовском государственном университете им. Г. Р. Державина при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/) на основании данных полевого эксперимента, проведенного под руководством А. А. Гончарова в Институте проблем экологи и эволюции им. А. Н. Северцова РАН при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-76-10027, https://rscf.ru/project/22-76-10027/), с использованием структуры математической модели, предложенной Г. А. Бочаровым (Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН) и А. А. Гончаровым при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-76-10027, https://rscf.ru/project/22-76-10027/). Результаты раздела 3 получены первым автором в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/20-11-20131/).

Для цитирования: *Бурлаков Е.О., Мальков И.Н.* Математическое моделирование в задаче разработки эффективного метода контроля фузариоза колоса пшеницы // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 236–244.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-236-244

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-236-244

Mathematical modeling in the problem of developing an effective method for controlling fusarium of wheat ear

Evgenii O. BURLAKOV[1,2], **Ivan N. MALKOV**[1,3]

[1] Tyumen State University
6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russian Federation
[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation
[3] Derzhavin Tambov State University
33 International St., Tambov 392036, Russian Federation

Abstract. In this paper we constructed a mathematical model based on a continuous dynamic system, which is formalizing the interaction of fusarium fungi, wheat plants and soil microorganisms (mycophages and saprophages). The paper presents a statistical analysis of the available experimental data obtained under laboratory conditions, on the basis of which we solved the problem of restoring biologically interpreted parameters of the constructed model of the considered ecological system. The paper also considers the problem of impulse control within the constructed mathematical framework, which corresponds to a correction on the food webs in the system in order to stimulate the growth of the populations of natural antagonists of the fusarium fungus causing wheat pathology by applying special mixtures of organic fertilizers to the soil. We obtained conditions that guarantee controllability within the framework of the constructed mathematical model, as well as providing continuous dependence of solutions of the modeling equations on control.

Keywords: mathematical models in ecology, parameter identification, impulse control problems

Acknowledgements: The work is conducted in the framework of the academic leadership program Priority 2030. The results of sections 1 and 2 were obtained by the second author at Derzhavin Tambov State University with the support of the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/) based on the data of the field experiment conducted under the supervision of A. A. Goncharov at A. N. Severtsov Institute of Ecology and Evolution of the Russian Academy of Sciences with the support of the Russian Science Foundation (project no. 22-76-10027, https://rscf.ru/en/project/22-76-10027/) using the structure of the mathematical model suggested by G. A. Bocharov (Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences) and A. A. Goncharov with the support of the Russian Science Foundation (project no. 22-76-10027, https://rscf.ru/en/project/22-76-10027/). The results of section 3 were obtained by the first author at V. A. Trapeznikov Institute of Control Problems RAS with the support of the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131, https://rscf.ru/en/project/20-11-20131/).

Mathematics Subject Classification: 37N25, 34H05.

For citation: Burlakov E.O., Malkov I.N. Mathematical modeling in the problem of developing an effective method for controlling fusarium of wheat ear. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 236–244.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-236-244 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В течение последних десятилетий наблюдается рост потерь урожая пшеницы, вызванный различными почвенными фитопатогенами, в том числе фузариевыми грибами. В большинстве регионов России зерно заражено грибами рода *Fusarium*, причем в некоторых из них доля заражения превышает 50%. Из-за высокой изменчивости и специфической этиологии фузариевых грибов существующие методы их контроля (обработка зерна перед посевом, правильное хранение зерна, а также выращивание устойчивых к фузарию сортов пшеницы) не являются достаточно эффективными.

Есть все основания полагать, что манипулируя структурой детритных пищевых сетей, можно воздействовать на почвенную фазу фузариевых грибов, во время которой эти грибы ведут себя подобно сапротрофной микрофлоре и имеют пониженную конкурентную способность [1, 2], а также низкую устойчивость к выеданию почвенной фауной [3–5].

В данной работе ставится задача построения математической модели, позволяющей оценить взаимное влияние фузариевых грибов, микофагов и сапрофагов друг на друга и на биомассу пшеницы на основании экспериментальных данных. Также в работе предложена формализация воздействий на детритные пищевые цепи в исследуемой системе путем внесения специальной смеси органических удобрений (мульчирующей смеси), являющейся питательным субстратом для естественных антагонистов фузария, в терминах задачи импульсного управления для рассматриваемой модели.

1. Анализ экспериментальных данных

В ходе эксперимента использовались четыре независимых друг от друга экспериментальных площадки, заполненных почвой с посевных полей. На эти площадки были высажены всходы пшеницы. На условные 0-й, 21-й, 48-й и 95-й дни эксперимента на всех четырех площадках в верхнем слое почвы собирались данные: биомасса фузариевых грибов (копии генов / м ^{2}), численность микофагов и сапрофагов (особи / м ^{2}), а также средняя масса растения пшеницы (граммы). На рисунке 1 представлены данные эксперимента.

Для решения задачи построения математической модели по экспериментальным данным необходимо оценить вероятностный закон, по которому они распределены. С помощью критерия согласия Лиллиефорса [6] при проверке ряда гипотез о типе распределения данных установлено, что используемые экспериментальные данные распределены лог-нормально.

Так как предположения о взаимодействии компонент системы основаны на данных по динамике численности в течение нескольких недель, необходимо выяснить, соответствуют ли данным сделанные предположения. Для оценки существенности отличий между данными в разные дни эксперимента, была проверена статистическая значимость различий между средними у рассматриваемых групп (группы сформированы по дням) с использованием критерия Бартлетта [7]. В таблице 1 приведены вычисленные значения распределения χ^2 на уровне значимости $\alpha = 0.05$ с тремя степенями свободы для данных по фузарию ($\chi^2_{3,0.05}(F)$), микофагам ($\chi^2_{3,0.05}(M)$), сапрофагам ($\chi^2_{3,0.05}(S)$) и пшенице ($\chi^2_{3,0.05}(B)$), а также критические значения ($\chi^2_{3,0.05}(Cr)$) данного распределения. Из значений в таблице 1 можно сделать вывод, что средние для всех групп статистически значимо различаются.

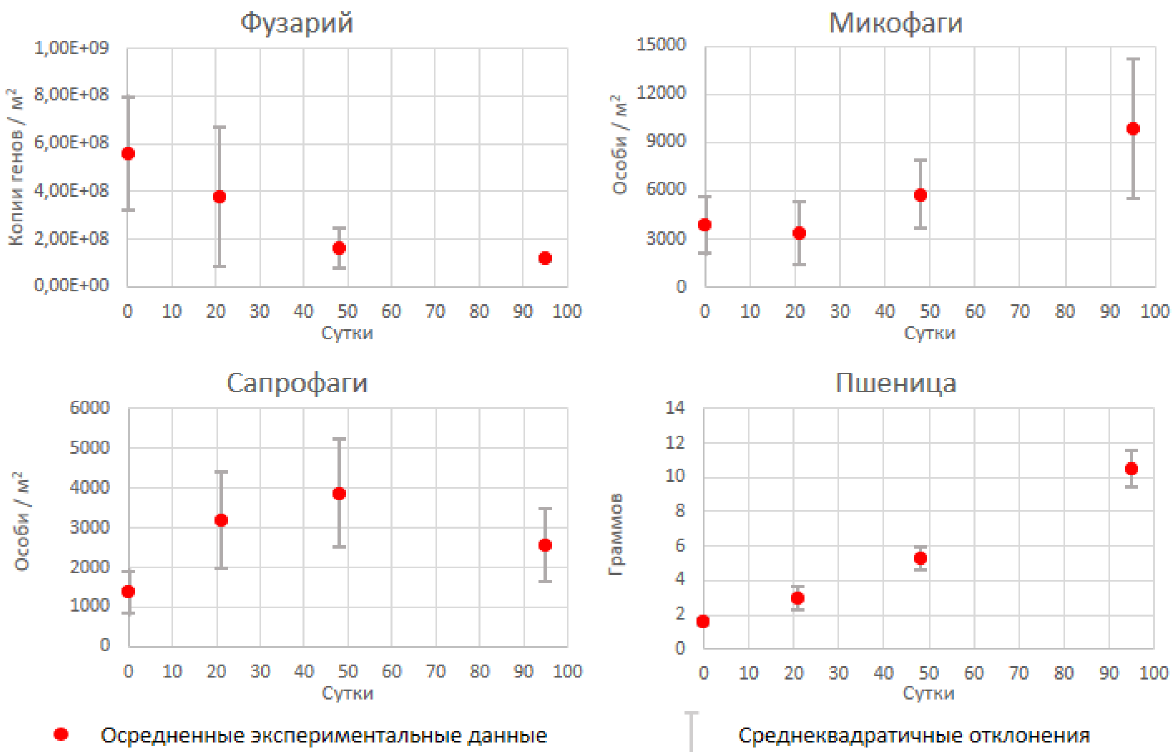

Рис. 1. Экспериментальные данные

Таблица 1

Результаты проверки критерия Бартлетта для экспериментальных данных

$\chi^2_{3,0.05}(Cr)$	$\chi^2_{3,0.05}(F)$	$\chi^2_{3,0.05}(M)$	$\chi^2_{3,0.05}(S)$	$\chi^2_{3,0.05}(B)$
7,81	85,25	15,93	11,12	27,76

2. Математическая модель

В описываемой системе предполагаются взаимодействия типа «хищник-жертва», где в роли хищников выступают грибоядные микофаги и сапрофаги, а в роли жертв — грибы рода *Fusarium*. Более того, фузариевые грибы могут размножаться вне зависимости от условий и наличия пищи, а на количество микофагов и сапрофагов наличие пищи влияет существенно, то есть их прирост зависит от количества фузариевых грибов в почве. Также предполагается негативное влияние фузариевых грибов на биомассу пшеницы, так как патогенный гриб поражает корни и лишает растение возможности получать необходимые вещества и минералы. Схема описанной модели приведена на рисунке 2 (остроугольными и прямоугольными стрелками обозначены взаимодействия, характеризуемые положительным и отрицательным, соответственно, вкладами в динамику указанных компонент).

Система дифференциальных уравнений, формализующих взаимодействие почвенных микроорганизмов (фузарий, микофаги, сапрофаги) и растений пшеницы в соответствии с представленной схемой, имеет следующий вид:

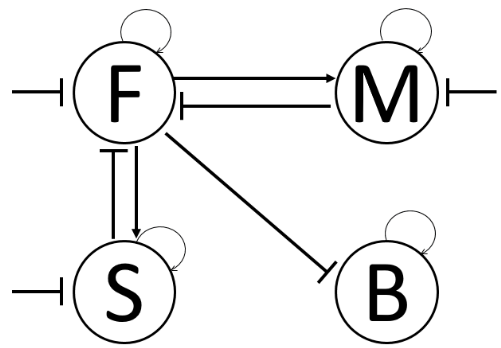

Рис. 2. Схема взаимодействия организмов в рассматриваемой экологической системе

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}F(t) = \beta_F F(t)(1 - \frac{F(t)}{\theta_F}) - \gamma_{FM}F(t)M(t) - \gamma_{FS}F(t)S(t),\\
&\frac{d}{dt}M(t) = \beta_M M(t) - \beta_{FM}F(t)M(t) - \mu_M M(t),\\
&\frac{d}{dt}S(t) = \beta_S S(t) - \beta_{FS}F(t)S(t) - \mu_S S(t),\\
&\frac{d}{dt}B(t) = \frac{\beta_B B(t)(C_B - B(t))}{\theta_B + \gamma_{FB}F(t)},
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $F(t), M(t), S(t)$ — значения плотности популяции фузария, микофагов, сапрофагов, соответственно, а $B(t)$ — среднее значение сухой массы растения пшеницы; в таблице 2 представлено описание параметров модели.

Для решения задачи идентификации параметров системы (2.1), в сокращенной форме имеющей вид

$$\dot{\overline{X}}(t) = G(\overline{X}),$$

где $\overline{X} = (F(t), M(t), S(t), B(t))^T_,$ $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ — локально липшицева функция, соответствующая правой части (2.1), применим метод максимального правдоподобия. С учетом лог-нормального распределения данных введем функционал $\mathcal{F}$, определяющий соответствие значений решения модели экспериментальным данным:

$$\mathcal{F}(\overline{X}) = \sum_{t_i \in \{0,21,48,95\}} \sum_{j=1}^{4} (\ln x_j(t_i, \overline{p}) - \ln \widetilde{x}_{ij})^2.$$

Здесь t_i — i-й день ($t_i \in \{0, 21, 48, 95\}, i = 1, 2, 3, 4$), переменная суммирования j отвечает за определенную компоненту модели, $\widetilde{x}_{ij}$ — экспериментальные данные j-й компоненты $\overline{X}$ на день t_i, $\overline{p}$ — вектор параметров модели (см. таблицу 2), $x_j(t_i, \overline{p})$ – значение j-й компоненты $\overline{X}$ в момент времени t_i при значениях параметров $\overline{p}$, полученное при решении системы (2.1). Для идентификации параметров модели необходимо решить задачу минимизации функционала $\mathcal{F}$ относительно переменной $\overline{p}$, предварительно оценив области определения ее компонент, например, методом профилирования функции правдоподобия [8]. Результаты применения данного метода представлены в таблице 3.

Для решения задачи поиска значений $\overline{p}$, минимизирующих функционал $\mathcal{F}$, используем метод Нелдера–Мида [9]. Динамика компонент системы (2.1) при найденном значении $\overline{p}$ представлена на рисунке 3.

Таблица 2

Описание параметров модели (2.1)

Параметр	Описание	Параметр	Описание
β_F	Скорость прироста численности фузария	β_S	Скорость размножения сапрофагов
θ_F	Максимальное возможное количества фузария	β_{FS}	Скорость воспроизводства сапрофагов при питании фузарием
γ_{FM}	Скорость истребления фузария питающимися ими микофагами	μ_S	Скорость естественной гибели сапрофагов
γ_{FS}	Скорость истребления фузария питающимися ими сапрофагами	β_B	Скорость увеличения биомассы пшеницы
β_M	Скорость размножения микофагов	C_B	Максимальная возможная биомасса пшеницы
β_{FM}	Скорость воспроизводства микофагов при питании фазурием	θ_B	Порог полуингибирования биомассы пшеницы под действием фузария
μ_M	Скорость естественной гибели микофагов	γ_{FB}	Степень влияния фузария на скорость увеличения биомассы пшеницы

Таблица 3

Результат оценки областей определения параметров модели (2.1)

Параметр	Левая граница	Правая граница
β_F	0,00	18802,44
θ_F	368,87	∞
γ_{FM}	0,00	2,74E-05
γ_{FS}	0,00	2,17E-05
β_M	0,00	22288,40
β_{FM}	0,00	5,90E-05
μ_M	0,00	22286,41
β_S	0,00	51995,12
β_{FS}	0,00	3,21E-04
μ_S	0,00	51993,13
β_B	3,20E-02	4,08E-02
C_B	0,00	1,36E+07
θ_B	28,15	35,89
γ_{FB}	0,00	3,46E-08

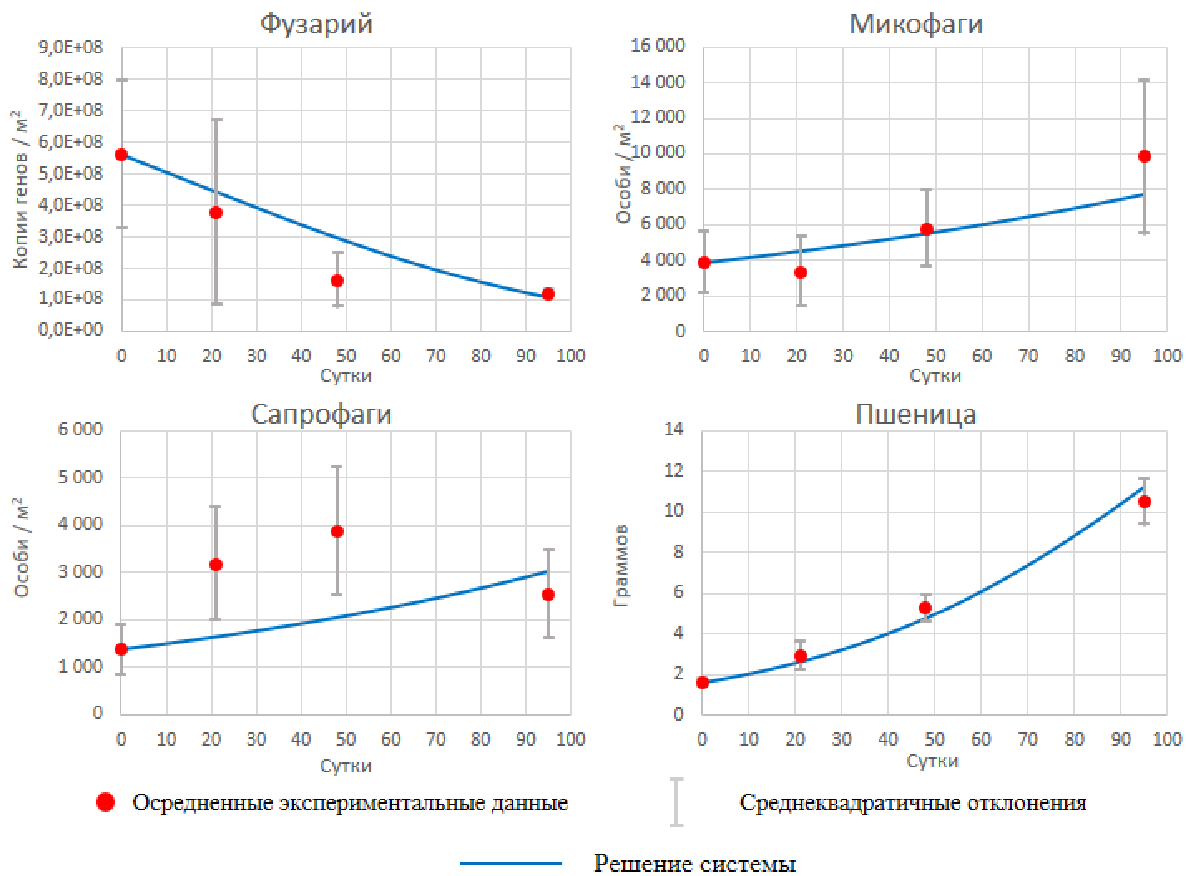

Рис. 3. Динамика компонент системы (2.1)
при идентифицированных значениях параметров

3. Задача импульсного управления для модели (2.1)

Результаты моделирования демонстрируют возможность применения модели (2.1) для дальнейших исследований, направленных на разработку методов контроля фузариевых грибов в агроценозах путем внесения мульчирующих смесей, стимулирующих рост популяций естественных антагонистов фузария. Данные методы естественно формализуются, например, в рамках задачи импульсного управления для изучаемой системы, дополненной компонентой V, соответствующей массе мульчирующей смеси:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}F(t) = \beta_F F(t)(1 - \frac{F(t)}{\theta_F}) - \gamma_{FM}F(t)M(t) - \gamma_{FS}F(t)S(t),\\
&\frac{d}{dt}M(t) = \beta_M M(t) - \beta_{FM}F(t)M(t) - \mu_M M(t) + \nu_M V(t),\\
&\frac{d}{dt}S(t) = \beta_S S(t) - \beta_{FS}F(t)S(t) - \mu_S S(t) + \nu_S V(t),\\
&\frac{d}{dt}B(t) = \frac{\beta_B B(t)(C_B - B(t))}{\theta_B + \gamma_{FB}F(t)} + \nu_B V(t),\\
&\frac{d}{dt}V(t) = -V(t)(c_M M(t) + c_S S(t) + c_B B(t)),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где параметры ν_M, ν_S, ν_B отвечают за влияние смеси на популяции микофагов и сапрофагов и биомассу пшеницы, соответственно; параметры c_M, c_S, c_B определяют скорости потребления мульчирующей смеси микофагами и сапрофагами и растениями пшеницы.

Будем рассматривать систему (3.1) с начальным условием $\overline{X}(a) = \overline{X}_0 \in \mathbb{R}^5$ на временном отрезке $[a, b]$, соответствующем сезонному циклу системы. С учетом обозначения

$$\overline{X}(t) = (F(t), M(t), S(t), B(t), V(t))^T, \quad \overline{X}(t) \in \mathbb{R}^5,$$

систему (3.1) можно переписать в виде

$$\dot{\overline{X}}(t) = \overline{X}_0 + \int_a^t G(\overline{X}(s))ds. \tag{3.2}$$

Рассмотрим следующую задачу импульсного управления для (3.2):

$$\dot{\overline{X}}(t) = \overline{X}_0 + \int_a^t G(\overline{X}(s))ds + \overline{U}(t), \tag{3.3}$$

где $\overline{U}$ — управляющая функция вида $(0, 0, 0, 0, \sum_{\forall\, k} \chi_{[t_k, b]}(t)V_k)^T$, χ_A — характеристическая функция множества $A \subset [a, b]$, $\{t_k\} \subset [a, b]$, $0 \leqslant k \leqslant K \in \mathbb{N}$. Таким образом, различные управления $\overline{U}$ могут состоять из разного количества импульсных воздействий, общее количество которых для каждого управления не превосходит $K \in \mathbb{N}$.

Определим множество $\mathcal{Y}$ функций вида $\overline{Y} = \overline{X} + \overline{U}$, где $\overline{X}$ — функция из класса непрерывных вектор-функций с пятью компонентами. Множество $\mathcal{Y}$ образует полное метрическое пространство относительно метрики

$$\rho_{\mathcal{Y}}(\overline{Y}_1, \overline{Y}_2) = \|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\|_C + \int_a^b \Big| \sum_{k: t_k^1 \in [a,b]} \chi_{[t_k^1, b]}(t)V_k^1 - \sum_{k: t_k^2 \in [a,b]} \chi_{[t_k^2, b]}(t)V_k^2 \Big| dt,$$

где символом $\| \cdot \|_C$ обозначена норма в соответствующем пространстве непрерывных функций. Подобная метрика была определена в работе [10] при исследовании задач импульсного управления нейронными системами.

Решением задачи управления (3.3) будем считать функцию $\overline{Y} \in \mathcal{Y}$, удовлетворяющую уравнению (3.3).

Утверждение 3.1. *При любом управлении $\overline{U}$ задача (3.3) имеет единственное решение. Кроме того, если некоторая последовательность управлений $\overline{U}^i$ сходится к управлению $\overline{U}^0$ в смысле сходимости $\int_a^b \Big| \sum_{k: t_k^i \in [a,b]} \chi_{[t_k^i, b]}(t)V_k^i dt - \sum_{k: t_k^0 \in [a,b]} \chi_{[t_k^0, b]}(t)V_k^0 \Big| dt \to 0$ при $i \to \infty$, то последовательность решений $\overline{Y}^i$ системы (3.3), соответствующих управлениям $\overline{U}^i$, сходится к решению $\overline{Y}^0$, соответствующему управлению $\overline{U}^0$, в метрике пространства $\mathcal{Y}$.*

Справедливость данного утверждения следует из основного результата работы [10].

References

[1] G. S. Abawi, J. W. Lorbeer, “Several aspects of the ecology and pathology of Fusarium oxysporum f. sp. cepae”, *Phytopathology*, **62** (1972), 870–876.

[2] J. J. Marois, D. J. Mitchell, “Effects of fungal communities on the pathogenic and saprophytic activities of Fusarium oxysporum f. sp. radicis-lycopersici”, *Phytopathology*, **71** (1981), 1251–1256.

[3] S. N. Smith, “An overview of ecological and habitat aspects in the genus Fusarium with special emphasis on the soil-borne pathogenic forms”, *Plant Pathology Bulletin*, **16** (2007), 97–120.

[4] G. Innocenti, M. A. Sabatini, "Collembola and plant pathogenic, antagonistic and arbuscular mycorrhizal fungi: a review", *Bulletin of Insectology*, **71**:1 (2018), 71–76.

[5] F. Meyer-Wolfarth, S. Schrader, E. Oldenburg, J. Weinert, F. Brunotte, "Collembolans and soil nematodes as biological regulators of the plant pathogen Fusarium culmorum", *Journal of Plant Diseases and Protection*, **124** (2007), 493–498.

[6] H. W. Lilliefors, "On the Kolmogorov–Smirnov test for normality with mean and variance unknown", *Journal of the American Statistical Association*, **62**:318 (1967), 399–402.

[7] M. S. Bartlett, "Properties of sufficiency and statistical tests", *Proceedings of the Royal Statistical Society*, **160**:901 (1937), 268–282.

[8] Н. Н. Амосова, Б. А. Куклин, С. Б. Макарова, Ю. Д. Максимов, Н. М. Митрофанова, В. И. Полищук, Г. Л. Шевляков, *Вероятностные разделы математики*, Иван Федоров, СПб., 2001. [N. N. Amosova, B. A. Kuklin, S. B. Makarova, Yu. D. Maksimov, N. M. Mitrofanova, V. I. Polisthshyuk, G. L. Shevlyakov, *Veroyatnostnye Razdely Matematiki*, Ivan Fedorov Publ., SPb., 2001 (In Russian)].

[9] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, P. E. Wright, "Convergence properties of the Nelder–Mead simplex method in low dimensions", *SIAM Journal on Optimization*, **9**:1 (1998), 112–147.

[10] E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskii, "On well-posedness of generalized neural field equations with impulsive control", *Russian Mathematics (Iz VUZ)*, **60** (2016), 66-69.

Информация об авторах

Бурлаков Евгений Олегович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник института X-BIO, Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Мальков Иван Николаевич, аспирант, институт математики и компьютерных наук, Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5845-5591

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Бурлаков Евгений Олегович
E-mail: eb_@bk.ru

Поступила в редакцию 05.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 25.08.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the authors

Evgenii O. Burlakov, PhD, Researcher at the Insitute X-BIO, Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Ivan N. Malkov, Post-Graduate Student, Institute of Mathematics and Computer Science, Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5845-5591

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Evgenii O. Burlakov
E-mail: eb_@bk.ru

Received 05.06.2023
Reviewed 25.08.2023
Accepted for press 12.09.2023